

ÜBER EINE UNIVERSALANORDNUNG

=====

I. Hintergrund:

Seit Einführung des Wirkungsquants in die Beschreibung der Natur mußte die ursprüngliche Vorstellung von kontinuierlicher Raum-Zeit überdacht werden. Zwar liegt der formelmäßigen Beschreibung vom Teilchen und ihrer Wechselwirkung insoweit nach wie vor eine kontinuierliche Raum-Zeit zugrunde als es sich um Felder handelt. In dem Augenblick jedoch in dem Beobachtungen angestellt werden, in dem Ort und Zeit gemessen werden, kehrt die Natur wiederum ihre gequantelte Seite hervor.

Es ist dem Menschen zutiefst bewußt, daß zwischen seinen Gedanken und der Materie ein prinzipieller Unterschied besteht. Besteht dieses Bewußtsein zu Recht? Die Komplexität des Großhirns läßt die Überlegung durchaus zu, daß jeder Gedanke eines denkenden Subjekts verbunden ist mit einer genau diesem Gedanken entsprechenden materiellen Konfiguration in seinem Großhirn.

Solche Überlegungen könnten es nahe legen, den Begriff des Kontinuums kritisch zu überdenken. Insbesondere soll die Frage untersucht werden, in welchem Sinne überabzählbare Mengen existieren, etwa die überabzählbare Menge der reellen Zahlen, wenn doch in einer gequantelten Welt alles Existierende grundsätzlich abzählbar sein müßte und wenn man auch die Gedanken als einen Teil dieser gequantelten Welt ansehen kann.

II. Die Bildschirmmitteilung:

Es stellt sich sofort die Frage, wie die Welt der inneren Anschauung in einer Form beschrieben werden könnte, welche das Problem der Abzählbarkeit bzw. Überabzählbarkeit zu behandeln gestattet. Es wird daher versucht, eine Beschreibung

der Welt der Gedanken zu geben, die eine Behandlung des gestellten Problems ermöglicht.

Hier ist sofort eine weitere Einschränkung notwendig um überhaupt einen ersten Schritt zur Behandlung dieser Frage tun zu können. Diese Einschränkung soll darin bestehen, daß die "innere Welt" zunächst auf jene Gedanken beschränkt wird, die sich im üblichen Sinne "mitteilen" lassen. Was ist solch ein üblicher Sinn? Seit die Menschen Wissenschaft betreiben, haben sie die Ergebnisse ihrer Forschung schriftlich festgehalten und mündlich in Diskussionen behandelt. Wir wollen uns daher zunächst auf jene Gedanken beschränken, die durch eine schriftliche Mitteilung festgehalten werden können.

Damit wird die ganze innere Welt der Gefühle und Emotionen zum größten Teil (zumindest auf den ersten Blick) ausgeschlossen.

Das Problem, Aussagen über "alle möglichen Mitteilungen" zu machen, liegt darin, daß es einem denkenden Subjekt kaum möglich sein dürfte, alle jemals möglichen Gedanken aller möglichen denkenden Subjekte zu verstehen. Es erscheint daher notwendig, sich zunächst vom Begriff der Gedanken zu lösen und auf den Begriff der schriftlich formulierbaren Mitteilungen zurückzugehen.

Durch diese Beschränkung auf schriftliche Mitteilungen, deren Form noch zu erörtern sein wird, kann von der Individualität der Gedanken abstrahiert werden. Bei solchen schriftlichen Mitteilungen handelt es sich ja nicht mehr um Objekte der inneren Anschauung, sondern um Objekte der allgemein mit Methoden der Naturwissenschaften beschreibbaren Umwelt.

Wir wollen zunächst Ordnung in alle möglichen schriftlichen Mitteilungen bringen. Dazu gehen wir von der Überlegung aus, daß es stets möglich ist, jede beliebige schriftliche Mitteilung auf einem Fernschirmschirm, auf einem Monitor, aufzuzeichnen.

Dabei gehen wir folgendermaßen vor:

- Wir betrachten nur quadratische Bildschirme.
- Als Rasterlänge, durch welche die Schärfe der Bildschirme bestimmt wird, wählen wir die Seitenlänge eines Quadrates von $1/10$ mm.
- Wir betrachten zunächst eine Folge von Bildschirmen mit der jeweiligen Seitenlänge $1/10$ mm, $2/10$ mm usw., wobei die Fläche des Bildschirms, wie bereits erwähnt, quadratisch ist. Ein Bildschirm mit der Seitenlänge $n/10$ mm setzt sich also aus n^2 Elementarquadraten zusammen.
- Für jeden Bildschirm, der aus n^2 Elementarquadraten besteht, betrachten wir nun alle möglichen Kombinationen von weißen und schwarzen Elementarquadraten. Offenbar gibt es für jede Seitenlänge von $n/10$ mm genau $2^{n \cdot n}$ verschiedene Bildschirme, die aus einer Kombination von weißen und schwarzen Elementarquadraten zusammengesetzt sind.
- Jeden Bildschirm, bestehend aus einer beliebigen Kombination von weißen und schwarzen Elementarquadraten, bezeichnen wir als eine "Bildschirmmitteilung".
- Offenbar können alle so definierten Bildschirmmitteilungen abzählbar angeordnet werden.
- Diese Anordnung bezeichnen wir als "Universalanordnung".

Es erscheint vielleicht nicht angemessen, jedes beliebige aus schwarzen und weißen Elementarquadraten zusammengesetzte Quadrat als eine Bildschirmmitteilung zu bezeichnen. Allein inwieweit eine solche graphische Darstellung, wie wir eine solche Bildschirmmitteilung allgemein bezeichnen können, tatsächlich eine Mitteilung im üblichen Sinne enthält, kann ja jeweils nur von einem denkenden Subjekt beurteilt werden, das diese Bildschirmmitteilung vor Augen hat. Das Wesen der Universalanordnung soll aber gerade darin liegen, daß ihr Inhalt unabhängig von allfälligen denkenden Subjekten gesehen wird, die derartige Bildschirmmitteilungen vor Augen haben.

III. Eine Anordnung personenbezogener Aussagen:

In diesem Abschnitt soll ein Zusammenhang zwischen der Universalanordnung von Bildschirmmitteilungen und denkenden Subjekten hergestellt werden. Da wir immer das Ziel der Herstellung einer abzählbaren Anordnung vor Augen haben, ist es notwendig, auch für alle möglichen denkenden Subjekte eine abzählbare Anordnung zu finden. Dies kann etwa folgendermaßen geschehen:

Wir unterteilen unsere Raum-Zeit-Welt in vierdimensionale Raum-Zeit-Elemente. Ein solches Raum-Zeit-Element bestehe aus einem Würfel mit der Seitenlänge der Elementarlänge und der Dauer der Elementarzeit. Offenbar können alle möglichen derartigen Raum-Zeit-Elemente abzählbar angeordnet werden.

Wir gehen im weiteren davon aus, daß ein denkendes Subjekt jedenfalls eine gewisse räumliche und zeitliche Ausdehnung haben muß. Wann immer ein derartiges denkendes Subjekt eine Aussage trifft, können Ort und Zeit dieser Aussage durch mindestens ein derartiges Raum-Zeit-Element eindeutig bestimmt werden.

Durch eine Kombination der abzählbaren Bildschirmmitteilungen (Abschnitt II) und der abzählbaren Raum-Zeit-Elemente aus diesem Abschnitt können daher alle möglichen Aussagen (so weit sie für das jeweilige denkende Subjekt in Form einer Bildschirmmitteilung dargestellt werden können) aller möglichen denkenden Subjekte abzählbar angeordnet werden.

IV. Eine Anordnung "aller reellen Zahlen":

Wir wollen nun aus den abzählbar angeordneten personenbezogenen Aussagen jene auswählen, durch welche reelle Zahlen bestimmt werden. Darunter verstehen wir personenbezogene Aussagen, in denen das denkende Subjekt auf Grund der Bildschirmmitteilung die Aussage trifft: "Durch diese Bildschirmmitteilung wird für mich eine reelle Zahl definiert".

Diese personenbezogenen Aussagen dienen also nicht der Beschreibung von reellen Zahlen für den Leser dieser Zeilen,

sondern sie dienen der Beschreibung von Kombinationen von Aussagen in Form von Bildschirmmitteilungen in Verbindung mit denkenden Subjekten, für die durch diese Bildschirmmitteilung eine reelle Zahl definiert ist. Die Bedeutung der Bildschirmmitteilung für den Leser dieser Zeilen ist dabei gegenstandslos!

Wir sehen, daß diese Anordnung in keiner Weise darauf bedacht nimmt, ob die Aussage des denkenden Subjektes richtig oder falsch ist. Sie enthält alle richtigen Aussagen ebenso wie alle irrtümlich oder bewußt absichtlich falschen Aussagen. Für unsere Zwecke entscheidend ist aber, daß alle möglichen richtigen Aussagen über reelle Zahlen in dieser Anordnung ebenfalls enthalten sein müssen. Anders ausgedrückt: Für jede reelle Zahl, die in irgendeinem Zeitpunkt von irgendeinem denkenden Subjekt durch irgendeine Mitteilung beschrieben wird, ist in der Anordnung aller Aussagen ein Platz reserviert.

Ein Beweis für die Unvollständigkeit einer abzählbaren Anordnung überabzählbarer Mengen wird meist in der Weise geführt, daß nach Angabe der Anordnung ein Element definiert wird, das in dieser Anordnung nicht enthalten ist. Es gibt also einen Zeitpunkt, in dem ein denkendes Subjekt, nämlich der Kritiker der vollständigen Anordnung aller Elemente einer überabzählbaren Menge, ein Element durch eine Aussage beschreibt, das angeblich in der Anordnung nicht enthalten ist.

Nun haben wir es bisher vermieden, Elemente anzuordnen. Wir haben vielmehr nur Aussagen angeordnet, in denen ein denkendes Subjekt behauptet, daß durch eine bestimmte Bildschirmmitteilung ein Element der zur Diskussion stehenden Menge eindeutig definiert wird, und uns selbst hinsichtlich des Inhaltes der Aussagen eines Urteils entschlagen. Wir haben also in der bisherigen Anordnung nicht reelle Zahlen angeordnet, wohl aber haben wir personenbezogene Aussagen angeordnet, in denen denkende Subjekte über reelle Zahlen Aussagen treffen.

Wir behaupten nun, daß in dieser Anordnung für jede reelle Zahl ein Platz zur Verfügung steht, der keiner anderen reellen Zahl zukommt und daß diese Anordnung abzählbar ist. Ein Kritiker müßte also eine Aussage treffen, wonach eine von ihm zu bestimmende reelle Zahl existiere, für die in der Anordnung aller Aussagen kein Platz reserviert sei.

Für eine solche Aussage eines beliebigen Kritikers in einem beliebigen Zeitpunkt steht aber offenbar in unserer Anordnung ein Platz zur Verfügung (im Hinblick darauf, daß die Bildschirme aus doppelter Entfernung betrachtet bei einer doppelten Kantenlänge der Elementarquadrate das gleiche Bild ergeben, also für das denkende Subjekt die gleiche Aussage beinhalten, kommen sogar unendlich viele Bildschirmmitteilungen für jede einzelne Aussage, also unendlich viele Plätze, in Betracht). Da die Aussage des Kritikers in Form einer Bildschirmmitteilung dargestellt werden kann, für die, kombiniert mit Zeit und Ort dieser Kritik, ein Platz in der Anordnung reserviert ist, führt die Kritik zu einem Widerspruch. Der Kritiker muß ja gleichzeitig behaupten, durch seine Aussage werde eine reelle Zahl definiert, für die in der Anordnung angeblich kein Platz sei, während seine Aussage gerade durch diese Behauptung zu einem Platz in der Anordnung für die von ihm definierte Zahl führt.

In gleicher Weise können alle jene Unvollständigkeitsbeweise einer abzählbaren Anordnung von Elementen von angeblich überabzählbaren Mengen widerlegt werden, bei denen der Kritiker der abzählbaren Anordnung ein in der abzählbaren Anordnung angeblich nicht enthaltenes Element definiert. Eine solche Definition, ausgedrückt in einer Bildschirmmitteilung und verbunden mit Ort und Zeitpunkt der Kritik, führt per definitionem zu einem für dieses Element reservierten Platz in der Anordnung.

V. Das Cantor'sche Diagonalverfahren:

Zum Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen

0 und 1 kann das Cantor'sche Diagonalverfahren etwa in folgender Weise herangezogen werden: Bei gegebener angeblich abzählbarer Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 werden diese Zahlen in Form von unendlichen Dezimalzahlen angeschrieben. Nach vorliegen dieser Anordnung wird eine weitere Dezimalzahl wie folgt gebildet: "Ist die n'te Dezimalstelle der Dezimalzahl in der n'ten Zeile gleich 0, so beträgt die n'te Dezimalstelle der Cantor'schen Diagonalzahl 1. Ist die n'te Dezimalstelle der Dezimalzahl in der n'ten Zeile ungleich 0, so ist die n'te Dezimalstelle der Cantor'schen Diagonalzahl gleich 0". Die Cantor'sche Diagonalzahl ist daher verschieden von jeder Dezimalzahl in der abzählbaren Anordnung, da jeweils die n'te Dezimalstelle der Dezimalzahl in der n'ten Zeile nicht mit der n'ten Dezimalstelle der Cantor'schen Diagonalzahl übereinstimmt.

Angewendet auf die Anordnung von freien Stellen für "jede beliebige reelle Zahl", wie sie im vorigen Abschnitt geboten wurde, versagt jedoch dieses Konzept. Abgesehen davon, daß offenbleiben muß, ob überhaupt im gegenwärtigen Zeitpunkt bzw. im Zeitpunkt der Kritik alle jene Dezimalzahlen, für die in der Anordnung ein Platz reserviert ist, auch tatsächlich definiert werden können - dies muß bezweifelt werden, da dies ja voraussetzen würde, daß die Entscheidung aller möglichen denkenden Subjekte darüber, ob durch eine Aussage eine reelle Zahl definiert ist oder nicht, vorweggenommen werden müßte - führt die Aussage des Kritikers für sich allein schon zu einem Widerspruch. Wie immer er seine Aussage formulieren mag, sie kann in Form einer Bildschirmmitteilung festgehalten werden. Und diese Bildschirmmitteilung findet nun zusammen mit Ort und Zeit der Kritik ihren Platz in der Anordnung. Gerade die Behauptung des Kritikers, die von ihm definierte Diagonalzahl stelle eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 dar, sichert ihr einen Platz in dieser Anordnung. Nach Definition der Cantor'schen Diagonalzahl müßte daher jene Dezimalstelle, die ihrer Zeilenzahl in der Anordnung entspricht von gerade dieser Dezimalstelle verschieden sein. D.h. die Definition der zum Be-

weis der Unvollständigkeit der Anordnung konstruierten Diagonalzahl enthält in sich einen Widerspruch.

VI. Widersprüche in anderen Überabzählbarkeitsbeweisen:

Analog der Herleitung des Widerspruchs bei der Konstruktion einer die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen beweisenden Diagonalzahl kann ein Widerspruch in den Unvollständigkeitsbeweisen für die abzählbare Anordnung von Elementen aller jener angeblich überabzählbaren Mengen gefunden werden, bei denen der Widerspruch durch die Konstruktion eines angeblich in der abzählbaren Anordnung nicht enthaltenen Elementes dieser Menge herbeigeführt wird.

Ausgangspunkt ist wieder eine abzählbare Anordnung personenbezogener Aussagen, in denen die jeweils in Betracht kommenden denkenden Subjekte in den jeweils in Betracht kommenden Zeitpunkten behaupten, durch die jeweilige Bildschirmmitteilung werde ein Element der in Rede stehenden Menge beschrieben.

Behauptet nun ein Kritiker dieser abzählbaren Anordnung, daß für ein Element der Menge kein Platz reserviert sei, dann trifft er in einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort eine in Form einer Bildschirmmitteilung darstellbare Aussage, von der er selbst behauptet, durch sie werde ein Element der in Rede stehenden Menge beschrieben. Gerade durch diese Behauptung des Kritikers wird aber für die Kombination dieser Bildschirmmitteilung mit dem Raum-Zeit-Element der Kritik ein Platz in der Anordnung reserviert. Der Kritiker trifft also die Aussage: "Für das von mir beschriebene Element ist kein Platz in der Anordnung vorhanden", während gerade durch diese Behauptung des Kritikers ein solcher Platz reserviert ist und dies ist ein Widerspruch.

VII. Noch einmal: Die Universalanordnung

Durch eine Kombination der abzählbaren Bildschirmmitteilungen mit den abzählbaren Raum-Zeit-Elementen haben wir eine abzählbare Anordnung aller möglichen Aussagen beliebiger denkender Subjekte in beliebigen Zeitpunkten getroffen. Offenbar können wir eine gleichmächtige Menge als Untermenge der Universalanordnung definieren.

Dazu wählen wir jene Bildschirmmitteilungen aus, die folgende 3 Teile enthalten:

1. Eine schriftliche Mitteilung beliebiger Art.
2. Die Angabe eines Raum-Zeit-Elementes durch welches ein denkendes Subjekt bestimmt wird.
3. Die Feststellung des denkenden Subjektes, daß durch die oben stehende Mitteilung für ihn ein Element der jeweils in Rede stehenden Menge eindeutig beschrieben wird.

Durch die so definierten Bildschirmmitteilungen wird offenbar für jedes denkbare Element jeder denkbaren Menge ein Platz reserviert. Die so geschaffene Anordnung ermöglicht die abzählbare Anordnung von beliebigen Elementen beliebiger Mengen. Ein Einwand der Unvollständigkeit einer solchen Anordnung, der durch die Behauptung eines fehlenden Platzes für ein bestimmtes zusätzliches Element erhoben wird (etwa für die Cantor'sche Diagonalzahl) führt zu einem Widerspruch, da, wie bereits dargelegt, gerade durch diese Behauptung des Kritikers ein Platz in der Anordnung reserviert wird.

Abschließend: Die hier vorgeschlagenen Anordnungen beinhalten nicht reelle Zahlen oder andere Elemente von in Rede stehenden Mengen. Die für die Plätze in Betracht kommenden Elemente bzw. reellen Zahlen werden jeweils durch die, dem Raum-Zeit-Element entsprechenden denkenden Subjekte bestimmt. Die Richtigkeit der Behauptung des denkenden Subjekts, daß es sich im Falle des Elementes, für das die betreffende Bildschirmmitteilung gedacht ist, tatsächlich um ein solches Element handelt, wird nicht überprüft und spielt bei dieser Form der Anordnung keine Rolle.

VIII. Formalisierung

Es sei $\{BSM\}$ die Menge aller Bildschirmmitteilungen. $\{BSM\}$ kann abzählbar angeordnet werden. Diese Anordnung nennen wir eine Universalanordnung (UA).

Es sei $\{RZE\}$ die Menge aller Raumzeitelemente.

Es sei $\{A\}$ die Menge aller Aussagen A, die durch eine BSM formulierbar sind.

Es sei $A (E \in M)$ die Aussage $E \in M$.

Es sei $B [A, RZE]$ eine Bildschirmmitteilung die besagt, daß eine Person, die durch RZE eindeutig gekennzeichnet ist, in einem Zeitpunkt, der durch RZE eindeutig gekennzeichnet ist, die Aussage A behauptet oder behaupten würde.

Beliebige Elemente E von beliebigen Mengen M, für die eine Aussage $A = A(E \in M)$ formuliert werden kann, können nun folgendermaßen angeordnet werden:

Der Platz jeder BSM der Gestalt $B [A(E \in M), RZE]$ in der UA wird dem Element E zugeordnet. (Offenbar gibt es dann unendlich viele Plätze für jedes E).

$$B [A(E \in M), RZE] \rightarrow E$$

Behauptung:

Jedem beliebigen Element E jeder beliebigen Menge \bar{M} kann in der UA mindestens 1 Platz zugeordnet werden, der keinem anderen Element zugeordnet ist.

Folgerung:

Alle Mengen von Elementen für die Aussagen $A(E \in M)$ als BSM formuliert werden können, sind abzählbar.

Beweis (indirekt):

Wir nehmen an, es gäbe ein $\bar{E} \in \bar{M}$, dem kein Platz in der UA zugeordnet wurde.

$$\forall RZE \neg \rightarrow B [A(\bar{E} \in \bar{M}), RZE] \rightarrow \bar{E} \quad (*)$$

Es muß dann eine Person geben können, die in irgendeinem Zeitpunkt diese Behauptung aufstellen kann. Diese Person muß also die Aussage $A(\bar{E} \in \bar{M})$ in irgendeinem Zeitpunkt bejahen können. Es gibt

somit (mindestens) ein diese Person und diesen Zeitpunkt eindeutig kennzeichnendes $\bar{R}\bar{Z}\bar{E}$ mit $B[A(\bar{E} \in \bar{M}), \bar{R}\bar{Z}\bar{E}] \in UA$ und

$$B[A(\bar{E} \in \bar{M}), \bar{R}\bar{Z}\bar{E}] \rightarrow \bar{E}$$

im Widerspruch zu (*).

IX. Nachwort

Eine kleine Brücke zu Wittgenstein.

Er beschränkt die Möglichkeit der "sinnvollen" Sprache "endgültig". Damit beschreibt er das Mystische bzw. Transzendente "von innen".

Auf die Frage, wo in seinem System eine "wegwerfende Handbewegung" Platz fände, wußte Wittgenstein keine Antwort. Dies führte seinerseits zu weiteren Überlegungen.

Wittgenstein betrachtete die Sprache offenbar als Transportmittel für Information von einer Person zu einer anderen, so daß neben der logischen Unbedenklichkeit von Sätzen auch die "Spielregeln" für die Verwendung (Bedeutung?) von Begriffen eine Rolle spielte (Sprachspiele).

In der hier vorgestellten UA ist jedoch die Sinnhaftigkeit einer Information für eine zweite Person nicht mehr vorausgesetzt. Die UA enthält somit alle im Sinne Wittgensteins sinnvollen Sätze (worüber man sprechen kann), aber auch "Unsinniges". In der UA wird auch "über Dinge geredet, über die man nicht reden kann", etwa wenn ein Gefühl (wegwerfende Handbewegung) durch Angabe des RZE "beschrieben" wird in dem es stattfindet.

Man könnte vielleicht sagen: Die UA enthält neben den laut Wittgenstein sinnvollen Sätzen auch alle jene Sätze, die nur für den der sie ausspricht, im Zeitpunkt ihres Aussprechens, einen Sinn ergeben. Damit müßte auch das von Wittgenstein als mystisch Gesehene, also das Transzendente, mit sprachlichen Mitteln (im Sinne der UA) eingefangen sein.